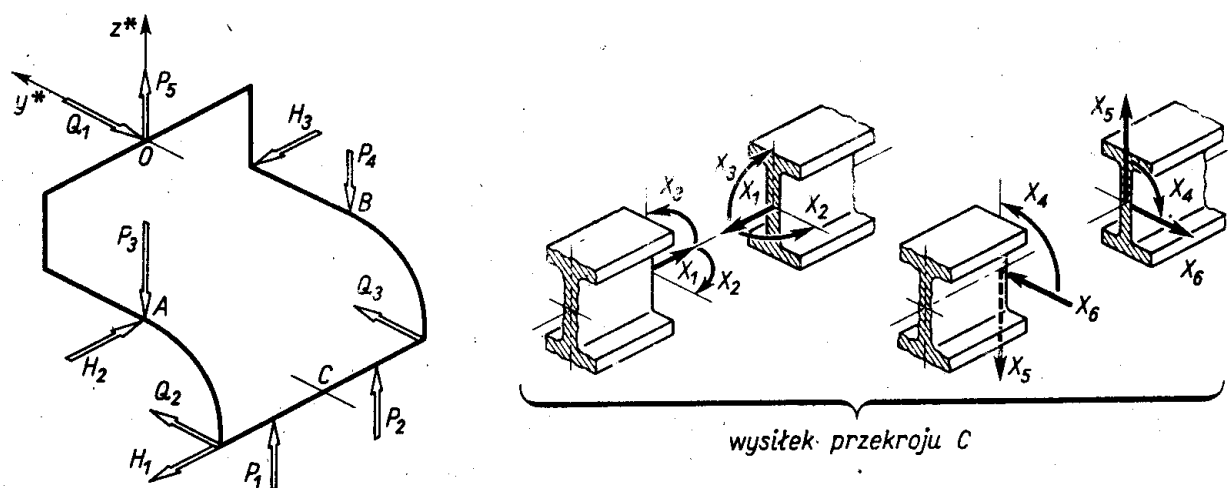


10.6. Ramy przestrzenne i płaskie obciążone przestrzennie

Rozważmy jednoobwodową przestrzenną ramę obciążoną będącym w równowadze układem sił P, H, Q (rys. 10.47). Rama taka jest na ogół ustrojem sześciokrotnie statycznie niewyznaczalnym, gdyż sprowadzenie jej do znanego już z art. 9.2 ustroju statycznie wy-

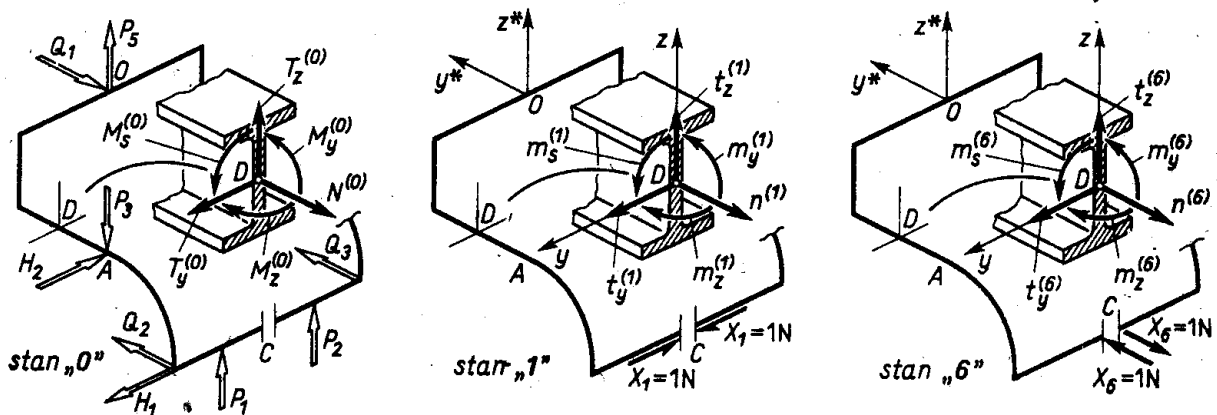


Rys. 10.47. Analiza przestrzennej ramy jednoobwodowej

znacznego wymaga myślowego przecięcia jej na przykład w przekroju C . Ujawnione przy tym składowe wysiłku w postaci sił wzdłużnych X_1 , momentów gnących X_2 i X_3 , momentów skręcających X_4 i sił tnących X_5 i X_6 nie mogą być określone z warunków równowagi ramy jako całości, gdyż są one parami przeciwnie. Wielkości te wyznaczamy z układu sześciu równań kanonicznych

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \alpha_{1,4} X_4 + \alpha_{1,5} X_5 + \alpha_{1,6} X_6 + \alpha_{1,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \alpha_{2,4} X_4 + \alpha_{2,5} X_5 + \alpha_{2,6} X_6 + \alpha_{2,0} &= 0, \\ \alpha_{3,1} X_1 + \alpha_{3,2} X_2 + \alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,4} X_4 + \alpha_{3,5} X_5 + \alpha_{3,6} X_6 + \alpha_{3,0} &= 0, \\ \alpha_{4,1} X_1 + \alpha_{4,2} X_2 + \alpha_{4,3} X_3 + \alpha_{4,4} X_4 + \alpha_{4,5} X_5 + \alpha_{4,6} X_6 + \alpha_{4,0} &= 0, \\ \alpha_{5,1} X_1 + \alpha_{5,2} X_2 + \alpha_{5,3} X_3 + \alpha_{5,4} X_4 + \alpha_{5,5} X_5 + \alpha_{5,6} X_6 + \alpha_{5,0} &= 0, \\ \alpha_{6,1} X_1 + \alpha_{6,2} X_2 + \alpha_{6,3} X_3 + \alpha_{6,4} X_4 + \alpha_{6,5} X_5 + \alpha_{6,6} X_6 + \alpha_{6,0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

wyrażających, jak zawsze, ciągłość przemieszczeń w myślowym przekroju C . Aby następnie wyznaczyć współczynniki $\alpha_{i,j}$ i wyrazy wolne $\alpha_{i,0}$, rozdzielamy stan równoważny na stany „0”, „1”, ..., „6” (rys. 10.48) i określamy w każdym z nich przebieg wysiłku przekrojów.



Rys. 10.48. Stany składowe przy rozwiązaniu ramy przestrzennej

Pamiętając, że $\alpha_{i,j}$ jest uogólnionym przesunięciem dla siły X_i , spełniającej rolę „czujnika”, a wywołanym przez $X_j = 1$ mamy z wzoru (9.8)

$$\alpha_{i,j} = \int \left(\frac{m_y^{(i)} m_y^{(j)}}{EJ_y} + \frac{m_z^{(i)} m_z^{(j)}}{EJ_z} + \frac{m_s^{(i)} m_s^{(j)}}{C} + \frac{n^{(i)} n^{(j)}}{EA} + \frac{\psi_z t_z^{(i)} t_z^{(j)}}{GA} + \frac{\psi_y t_y^{(i)} t_y^{(j)}}{GA} \right) ds, \quad (10.11)$$

gdzie oznaczenia $m_y^{(i)}, \dots$ są widoczne z rys. 10.48, a inne są jak we wzorze (9.8). Podobnie określamy

$$\alpha_{i,0} = \int \left(\frac{M_y^{(0)} m_y^{(i)}}{EJ_y} + \frac{M_z^{(0)} m_z^{(i)}}{EJ_z} + \frac{M_s^{(0)} m_s^{(i)}}{C} + \frac{N^{(0)} n^{(i)}}{EA} + \frac{\psi_z T_z^{(0)} t_z^{(i)}}{GA} + \frac{\psi_y T_y^{(0)} t_y^{(i)}}{GA} \right) ds, \quad (10.12)$$

jako uogólnione przesunięcie dla siły X_i wywołane obciążeniem w stanie „0”. Wszystkie przy tym uwagi podane w art. 9.4 znajdują tu zastosowanie. W szczególności należy do nich możliwość pominięcia we wzorach (10.11) i (10.12) trzech ostatnich składników reprezentujących wpływ sił wzdłużnych i tnących⁽¹⁾ oraz możliwość stosowania wzorów (10.11) i (10.12) do prętów słabo zakrzywionych.

⁽¹⁾ O ile oczywiście momenty gnące i skręcające nie są tożsamościowo równe zero. Przypomina się też, że związane z danym przekrojem pręta osie y i z są główne centralne.

Po rozwiązaniu układu równań (a) wypadkowy wysiłek przekroju obliczamy superponując jego składowe w stanie „0” i z odpowiednimi wielokrotnościami składowymi w stanach „1”, ..., „6”, tj.

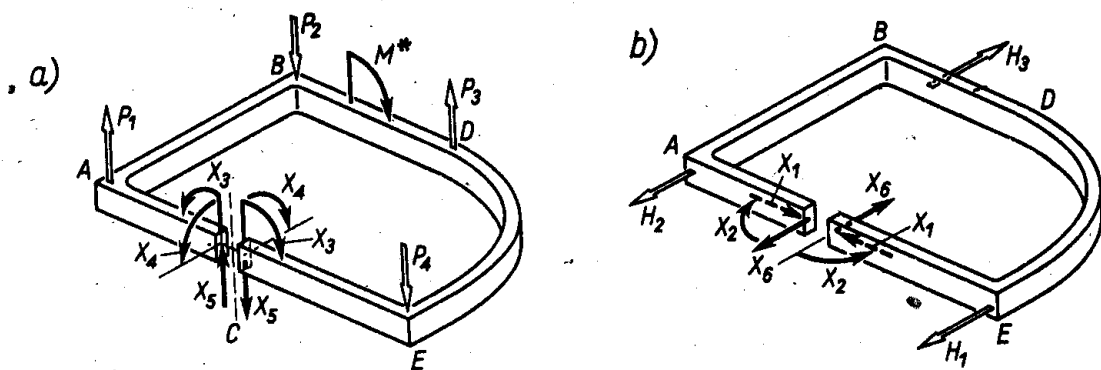
$$M_y = M_y^{(0)} + \sum_1^6 m_y^{(i)} X_i, \quad M_z = M_z^{(0)} + \sum_1^6 m_z^{(i)} X_i, \dots, \quad T_y = T_y^{(0)} + \sum_1^6 t_y^{(i)} X_i. \quad (b)$$

Powyższe ogólne rozwiązanie upraszcza się, gdy badana rama (rys. 10.47) jest symetryczna, na przykład względem płaszczyzny $y^* z^*$. Gdy przekrój C leży też w tej płaszczyźnie, wówczas grupa symetrycznych składowych wysiłku, czyli X_1, X_2 i X_3 , staje się niezależna od grupy antysymetrycznej X_4, X_5, X_6 , albowiem odpowiednie współczynniki układu (a) wyrażające sprzężenie między tymi grupami są równe zero. Dla przykładu zbadajmy współczynnik $\alpha_{1,6}$. Jest rzeczą oczywistą, że w stanie „1” (rys. 10.48) wielkości $m_y^{(1)}, m_z^{(1)}$ i $n^{(1)}$ mają przebieg symetryczny, a $t_z^{(1)}, t_y^{(1)}, m_z^{(1)}$ antysymetryczny, natomiast w stanie „6” sytuacja jest odwrotna. W rezultacie każdy elementarny składnik wzoru (10.11), np. $m_y^{(1)} m_y^{(6)} ds/EJ_y$, kasuje się z identycznym składnikiem dla symetrycznie położonego elementu i cała suma (całka) staje się równa zero, czyli $\alpha_{1,6} = 0$. W wyniku więc mamy zamiast układu (a) dwa układy równań

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,3} X_3 + \alpha_{1,0} &= 0, & \alpha_{4,4} X_4 + \alpha_{4,5} X_5 + \alpha_{4,6} X_6 + \alpha_{4,0} &= 0, \\ \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \alpha_{2,0} &= 0, & \alpha_{5,4} X_4 + \alpha_{5,5} X_5 + \alpha_{5,6} X_6 + \alpha_{5,0} &= 0, \\ \alpha_{3,1} X_1 + \alpha_{3,2} X_2 + \alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,0} &= 0, & \alpha_{6,4} X_4 + \alpha_{6,5} X_5 + \alpha_{6,6} X_6 + \alpha_{6,0} &= 0, \end{aligned} \right\} (c)$$

które rozwiązujemy niezależnie. Jeśli ponadto obciążenie jest symetryczne, to podobnie udowadniamy, że wyrazy $\alpha_{4,0}, \alpha_{5,0}$ i $\alpha_{6,0}$ są równe zero, skąd wynika, że antysymetryczne składowe X_4, X_5 i X_6 są też równe zero. Podobną właściwość wykazuje obciążenie antysymetryczne, dla którego składowe X_1, X_2 i X_3 są zerami. Rozkładając zatem ogólne obciążenie ustroju symetrycznego na część symetryczną i antysymetryczną, jak na rys. 10.10, możemy każdą z nich analizować oddzielnie.

Podobne, lecz nieidentyczne, uproszczenie rozwiązania mamy, gdy przestrzennie obciążona rama jest *ściśle płaska* (rys. 10.49). Zauważmy bowiem, że dla grupy niewiadomych X_1, X_2 i X_6 istnieją tylko składowe wysiłku działające w płaszczyźnie ramy,



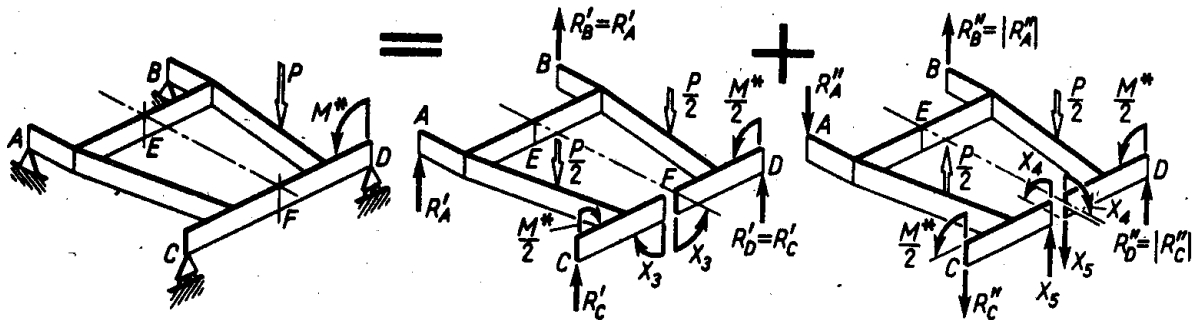
Rys. 10.49. Rozdział obciążenia i wielkości statycznie niewyznaczalnych w ramie ściśle płaskiej: a) układ przestrzenny, b) układ płaski

a pozostałe są równe zero.⁽¹⁾ Odwrotna sytuacja istnieje przy działaniu grupy X_3, X_4 i X_5 , i z (10.12) wynika, że sprzężenie tych grup jest zerowe, a układ (a) rozpada się na dwa:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,4} X_4 + \alpha_{3,5} X_5 + \alpha_{3,0} &= 0, \\ \alpha_{4,3} X_3 + \alpha_{4,4} X_4 + \alpha_{4,5} X_5 + \alpha_{4,0} &= 0, \\ \alpha_{5,3} X_3 + \alpha_{5,4} X_4 + \alpha_{5,5} X_5 + \alpha_{5,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

i analogiczny dla grupy niewiadomych X_1, X_2, X_6 . Ten drugi układ, znany już z art. 10.5, odpowiada obciążeniu działającemu w płaszczyźnie ramy, tj. siłom H (rys. 10.49b), natomiast pierwszej grupie odpowiada obciążenie prostopadłe do płaszczyzny ramy (rys. 10.49a). Innymi słowy rozwiązanie ogólne ramy ściśle płaskiej jest zawsze superpozycją dwóch rozwiązań prostszych: przestrzennego i płaskiego.

Gdy przestrzennie obciążona rama ściśle płaska ma oś symetrii (EF na rys. 10.50), a myślowe przecięcie F leży na tej osi, wówczas układ (d) rozpada się z kolei na dwa.



Rys. 10.50. Rozdział obciążenia i wielkości statycznie niewyznaczalnych w symetrycznej ramie ściśle płaskiej

W pierwszym z nich dla obciążenia symetrycznego istnieje tylko jedna niewiadoma X_3 określona zależnością

$$\alpha_{3,3} X_3 + \alpha_{3,0} = 0, \quad (e)$$

podczas gdy w drugim dla obciążenia antysymetrycznego w przekroju F występują pozostałe niewiadome X_4 i X_5 . W tym drugim przypadku trzecią niewiadomą, poza X_4 i X_5 , jest reakcja R'' jednej z czterech podpór ramy, gdyż dysponujemy tu tylko jednym równaniem równowagi (momentów względem osi symetrii EF), a pozostałe warunki są spełnione tożsamościowo. Przy obciążeniu symetrycznym kwestii tej nie ma, gdyż do określenia reakcji $R'_A = R'_B$ i $R'_C = R'_D$ mamy dwa równania równowagi momentów względem osi AB i CD .

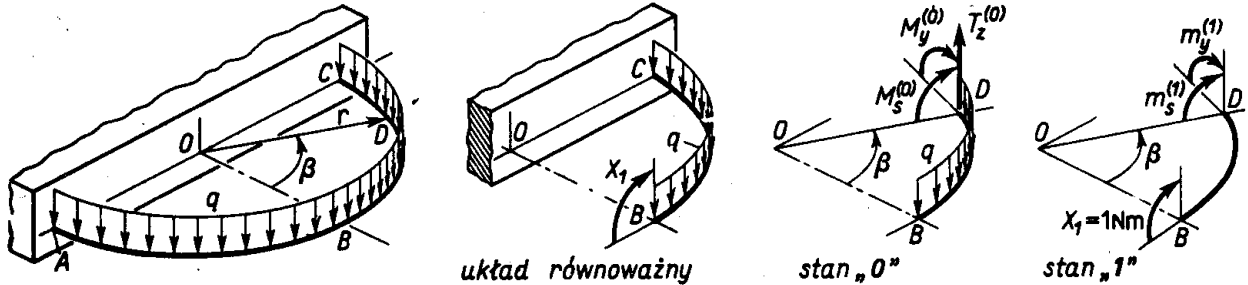
Zadania

1. Traktując ściśle płaski półpierścień (rys. 10.51) jako pręt słabo zakrzywiony określić w nim przebieg wysiłku przekroju.

⁽¹⁾ Według rys. 10.48: $m_2 \neq 0, n \neq 0, t_1 \neq 0, m_1 = 0, m_3 = 0, t_2 = 0$.

Rozwiązanie. Jeśli półpiersień przeciąć w B , to z powodu symetrii i ustroju, i obciążenia występuje tam tylko nie znany moment gnący X_1 określony z równania

$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} = 0.$$



Rys. 10.51. Ścisłe płaski półpiersień przestrzennie obciążony

Przez analogię do rys. 9.17 składowe wysiłku stanu „0” są

$$T_z^{(0)} = qr\beta, \quad M_y^{(0)} = -qr^2(1 - \cos \beta), \quad M_s^{(0)} = qr^2(\beta - \sin \beta)$$

i podobnie w stanie „1”: $m_y^{(1)} = \cos \beta$, $m_s^{(1)} = -\sin \beta$, skąd

$$\alpha_{1,1} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \beta r d\beta}{EJ_y} + 2 \int_0^{\pi/2} \frac{(-\sin \beta)^2 r d\beta}{C} = \frac{\pi r}{2} \left(\frac{1}{EJ_y} + \frac{1}{C} \right),$$

$$\alpha_{1,0} = -2 \int_0^{\pi/2} \frac{qr^2(1 - \cos \beta) \cos \beta r d\beta}{EJ_y} - 2 \int_0^{\pi/2} \frac{qr^2(\beta - \sin \beta) \sin \beta r d\beta}{C} =$$

$$= -qr^3 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{1}{EJ_y} + \frac{1}{C} \right)$$

i w rezultacie $X_1 = qr^2[(4/\pi) - 1]$, a wypadkowe wartości

$$M_y = M_y^{(0)} + m_y^{(1)} X_1 = qr^2[(4 \cos \beta/\pi) - 1], \quad M_s = -qr^2[(4 \sin \beta/\pi) - \beta].$$

Ekstremalne wartości M_y i M_s występują w przekroju A lub C , gdzie

$$|M_y| = qr^2, \quad |M_s| = qr^2[-(4/\pi) + (\pi/2)] \approx 0,298qr^2.$$

2. Powtórzyć zadanie 1, gdy zamiast obciążenia q na półpiersień działa siła pionowa P przyłożona w punkcie B .

Odp. $X_1 = Pr/\pi$, $|M_y|_{\text{ekstr}} = Pr/2$, $|M_s|_{\text{ekstr}} = (Pr/2)[1 - (2/\pi)]$.

3. Rozwiązać symetryczną ramę (rys. 10.52), jeśli $a = b = l/4$, $c = l/3$, $C = EJ_y/3$, $EJ'_y = EJ_y/4$, $C' = 1,5EJ'_y$, $EJ''_y = C' = 0,5EJ_y$.

Rozwiązanie. Z powodu antysymetrii obciążenia w myślowym przecięciu A występują tylko dwie niewiadome, tj. siły tnące X_1 i momenty X_2 , które wyznaczamy z równań

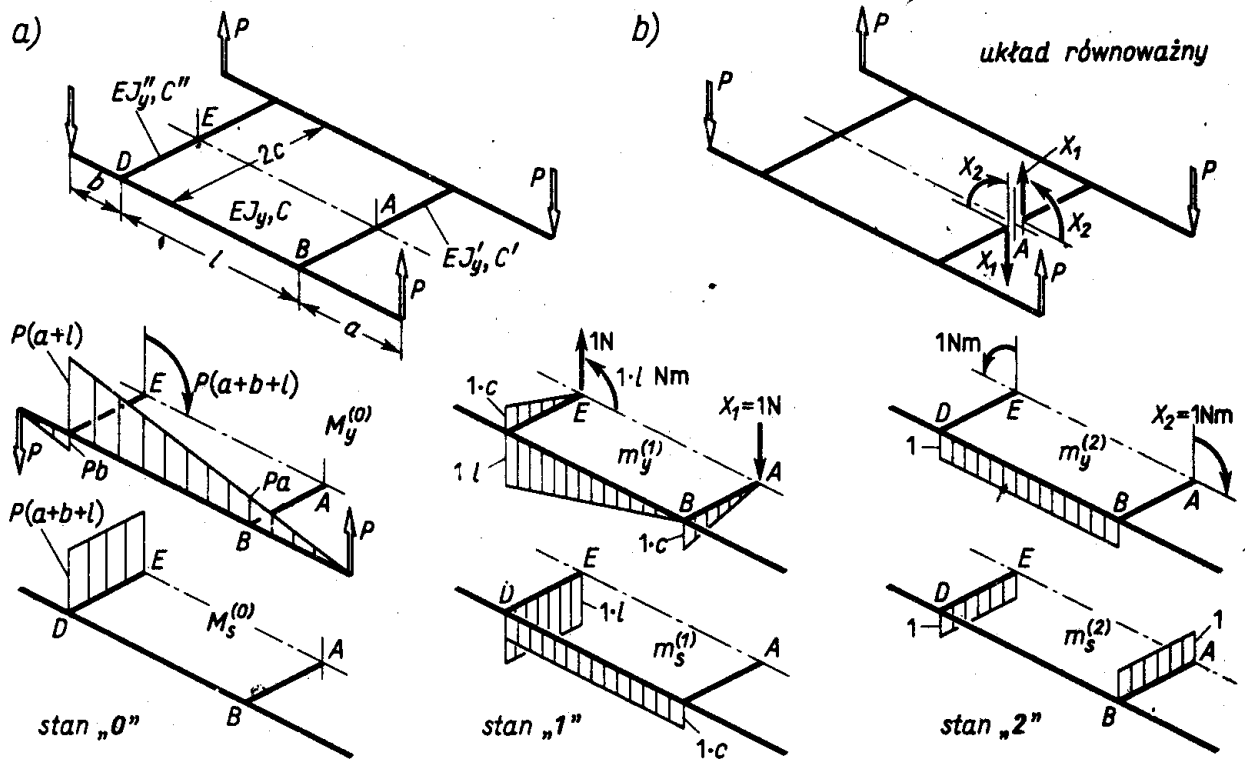
$$\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,2} X_2 + \alpha_{1,0} = 0, \quad \alpha_{2,1} X_1 + \alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,0} = 0.$$

Rozdzielając układ równoważny na stany składowe „0”, „1” i „2”, jak podaje rysunek, obliczamy z (10.11) i (10.12) wielkości

$$\alpha_{1,1} = \frac{l^3}{3EJ_y} \left[1 + \left(\frac{c}{l} \right)^3 \left(\frac{J_y}{J'_y} + \frac{J_y}{J''_y} \right) \right] + \frac{cl^2}{C''} \left(1 + \frac{c}{l} \frac{C''}{C} \right), \quad \alpha_{2,2} = \frac{l}{EJ_y} + \frac{c}{C''} \left(1 + \frac{C''}{C} \right),$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{l^2}{2EJ_y} + \frac{lc}{C''}, \quad \alpha_{1,0} = -\frac{Pl^2(2l+3a)}{6EJ_y} - \frac{P(a+b+l)cl}{C''},$$

$$\alpha_{2,0} = -\frac{Pl(l+2a)}{2EJ_y} - \frac{P(l+a+b)c}{C''}.$$



Rys. 10.52. Ściśle płaska rama przestrzennie obciążona

W obliczeniach tych uwzględniamy tylko połówkę ABDE ramy, gdyż dla drugiej połówki wartości iloczynów $M_y^{(0)}$, $m_y^{(1)}$, ... są te same. Wstawiając wartości szczególne $a = b = l/4$, $c = l/3$, ..., mamy

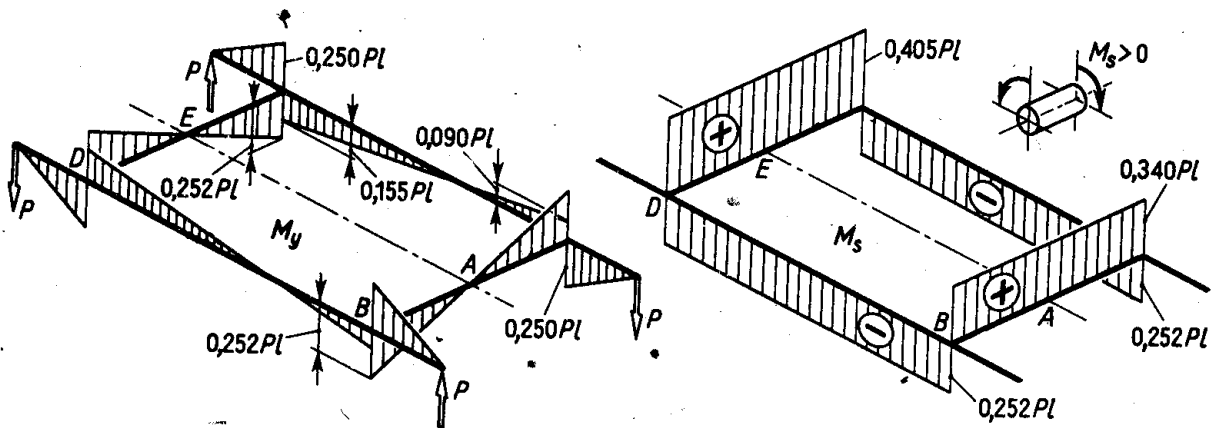
$$\alpha_{1,1} = \frac{1,407 l^3}{EJ_y}, \quad \alpha_{2,2} = \frac{2,555 l}{EJ_y}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{1,167 l^2}{EJ_y},$$

$$\alpha_{1,0} = -\frac{1,459 Pl^3}{EJ_y}, \quad \alpha_{2,0} = -\frac{1,750 Pl^2}{EJ_y},$$

a z rozwiązania równań kanonicznych

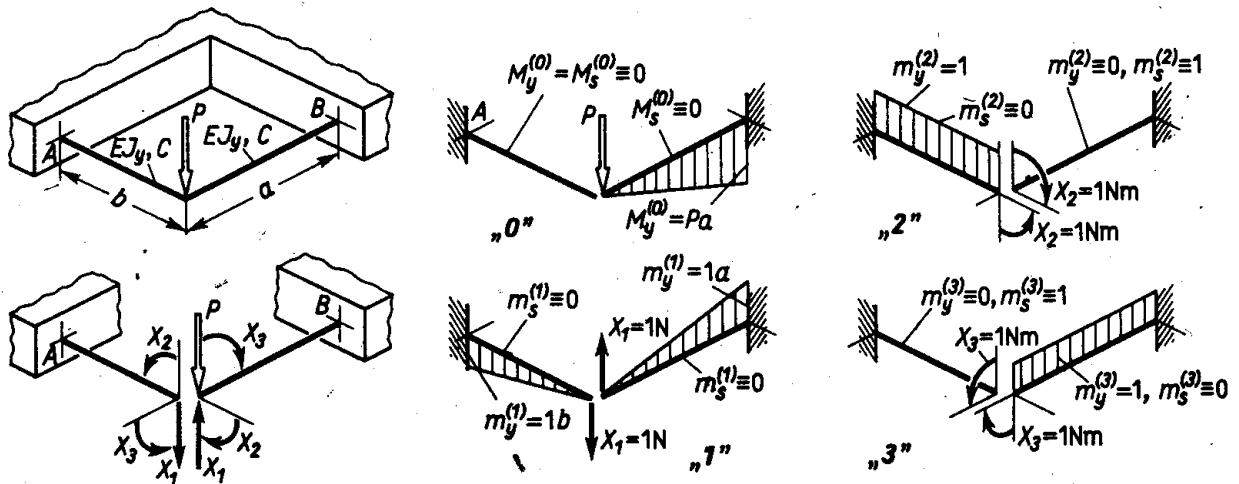
$$X_1 = 0,755P, \quad X_2 = 0,340Pl.$$

Superponując teraz wykresy składowych wysiłku stanu „0” i odpowiednio powiększone wykresy „1” i „2” mamy wynik ostateczny (rys. 10.53).



Rys. 10.53. Wynik rozwiązania dla ramy z rys. 10.52

Dane: $a = b = 0,25l$, $c = l/3$, $C = EJ_y/3$, $EJ'_y = EJ_y/4$, $C' = 1,5 EJ'_y$, $EJ''_y = C'' = 0,5 EJ_y$.



Rys. 10.54. Rozwiązanie ramy ściśle płaskiej

4. Rozwiązać ściśle płaską ramę (rys. 10.54), gdy $C = 0,7EJ_y$, $a = 0,8b$.

Rozwiązanie. Zadanie jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalne jak na rys. 10.49. Oznaczając niewiadome jak na rysunku otrzymujemy 3 obrazów wysiłku w poszczególnych stanach

$$\alpha_{1,1} = \frac{b^3}{3EJ_y} \left(1 + \frac{a^3}{b^3} \right), \quad \alpha_{1,2} = -\frac{b^2}{2EJ_y}, \quad \alpha_{1,3} = \frac{a^2}{2EJ_y},$$

$$\alpha_{2,2} = \frac{b}{EJ_y} + \frac{a}{C}, \quad \alpha_{2,3} = 0, \quad \alpha_{3,3} = \frac{a}{EJ_y} + \frac{b}{C},$$

$$\alpha_{1,0} = -\frac{Pa^3}{3EJ_y}, \quad \alpha_{2,0} = 0, \quad \alpha_{3,0} = -\frac{Pa^2}{2EJ_y},$$

a po wstawieniu $a = 0,8b$ i $C = 0,7EJ$, mamy układ równań

$$\begin{aligned} 0,504 X_1 b - 0,500 X_2 + 0,320 X_3 - 0,1707 Pb &= 0, \\ -0,500 X_1 b + 2,143 X_2 + 0 \cdot X_3 + 0 \cdot Pb &= 0, \\ 0,320 X_1 b + 0 \cdot X_2 + 2,228 X_3 - 0,3200 Pb &= 0, \end{aligned}$$

z którego rozwiązania

$$X_1 = 0,365 P, \quad X_2 = 0,085 Pb, \quad X_3 = 0,091 Pb.$$

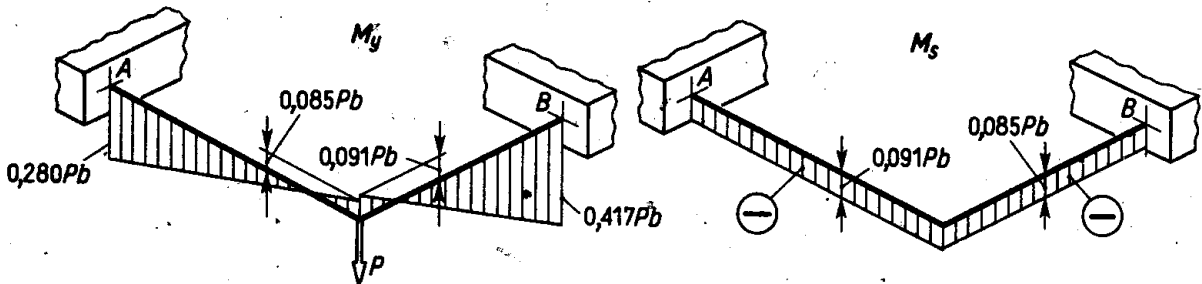
Wypadkowe wykresy M_y i M_s podaje rys. 10.55, przy czym znak minus przy momencie M_s odpowiada umowie z rys. 3.5.

5. Jak zmieni się wynik zadania 4, gdy dwukrotnie zwiększymy: a) tylko wymiary a i b ; b) wszystkie wymiary?

Odp. a) i b) rzędne wykresów momentów wzrosną dwukrotnie.

6. Jak zmieni się tok rozwiązania zadania 4, gdy rama pozostając płaska przestaje być ściśle płaska?

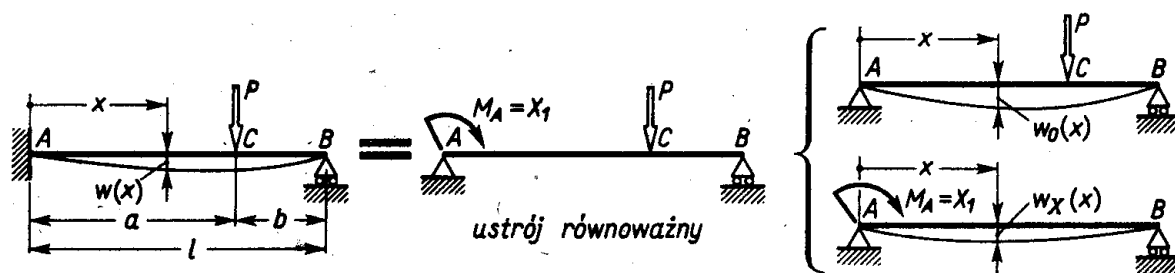
Odp. Zadanie staje się sześciokrotnie statycznie niewyznaczalne.



Rys. 10.55. Wynik rozwiązania ramy z rys. 10.54, gdy $a = 0,8b$, $C = 0,7 EJ$,

10.7. Wyznaczanie przemieszczeń w ustrojach statycznie niewyznaczalnych

Jak pamiętamy z art. 10.1 i 10.2, wprowadzenie ustroju równoważnego zamienia badany ustrój na statycznie wyznaczalny, z tym że niektóre obciążenia X mają nie znane na razie wartości. Po rozwiązaniu równań kanonicznych obciążenia X stają się znane i ustrój niczym się już nie różni od opisanych w poprzednich rozdziałach konstrukcji statycznie wyznaczalnych. Wynika stąd, że przemieszczenia w takich ustrojach można określić znanymi już metodami. Jedną z nich jest metoda superpozycji zastosowana przykładowo do wyznaczenia linii ugięcia $w(x)$ belki (rys. 10.56). Po wprowadzeniu momentu



Rys. 10.56. Określenie przemieszczeń ustroju metodą superpozycji

$M_A = X_1$ i obliczeniu jego wartości (patrz rys. 10.13 i 10.14) określamy metodami opisanymi w art. 5.8 linię ugięcia $w_0(x)$ odpowiadającą znanemu od początku obciążeniu (siła P) i linię $w_x(x)$ odpowiadającą obciążeniu X_1 wyznaczonemu z równania kanonicznego. Szukane ugięcie jest wtedy

$$w(x) = w_0(x) + w_x(x). \quad (a)$$

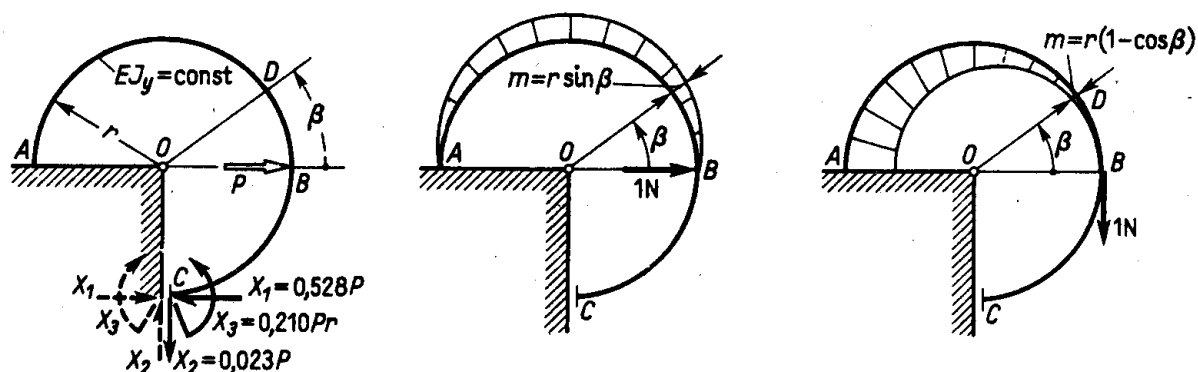
Dla przykładu⁽¹⁾ ugięcie w środku belki ($x = l/2$)

$$(w)_{x=l/2} = \frac{-Pb(3l^2 - 4b^2)}{48EJ_y} + \left[\frac{Pb(l^2 - b^2)}{2l^2} \right] \left(\frac{-l^2}{16EJ_y} \right) = \frac{-Pb(3l^2 - 5b^2)}{96EJ_y}$$

i gdy $b = l/2$, wówczas $w_{x=l/2} = -7Pl^3/768EJ_y$, a więc przeszło dwa razy mniej niż dla belki podpartej na podporach i obciążonej siłą pośrodku, dla której $w_{x=l/2} = w_0 = -Pl^3/48EJ_y$.

W większości przypadków, zwłaszcza ustrojów bardziej złożonych wyznaczenie przemieszczeń ogranicza się do ich określenia tylko w pewnych charakterystycznych punktach ustroju i wtedy stosujemy metodę Maxwella–Mohra opisaną w art. 9.3. Dla przykładu weźmy ramę (rys. 10.36), w której chcemy określić poziome przesunięcie punktu B . Ramę tę zamieniono na ustrój statycznie wyznaczalny przez myślowe rozcięcie w przekroju C i wprowadzenie wielkości X_1, X_2, X_3 jako nie znanej części obciążenia (rys. 10.57). Poziome przesunięcie punktu B tego ustroju statycznie wyznaczalnego obliczamy przykładając w punkcie B poziomą siłę jednostkową spełniającą rolę „czujnika”. Odpowiadający

⁽¹⁾ Zadania 2 i 4 art. 5.8 oraz wzór (10.6).



Rys. 10.57. Określenie przemieszczeń z zasady prac przygotowanych

jej wysiłek istnieje tylko na łuku AB ($0 \leq \beta \leq \pi$) i ma składowe

$$m_\theta = r \sin \beta \text{ Nm/N}, \quad n = \sin \beta \text{ N/N}, \quad t = \cos \beta \text{ N/N},$$

a szukane przesunięcie v_B jest według wzoru (9.2)

$$v_B = \int_0^\pi \frac{M_\theta m_\theta r d\beta}{EJ_y} + \int_0^\pi \frac{N n r d\beta}{EA} + \psi \int_0^\pi \frac{T t r d\beta}{GA}, \quad (b)$$

gdzie M_θ , N , T składowe wysiłku odpowiadają łącznemu działaniu siły P i obciążenia X_1 , X_2 , X_3 . Fakt, że ostatnie obciążenia wyznaczono z równań kanonicznych, tj. warunków ciągłości przemieszczeń w przekroju C , ma o tyle znaczenie, że wpływa w określony sposób na przebieg M_θ , N i T (rys. 10.37).

Wstawiając do wzoru (b) wartość M_θ z zadania 5 art. 10.5 i pomijając wpływ sił N i T mamy ostatecznie

$$v_B = \int_0^\pi \frac{(-0,318 + 0,472 \sin \beta + 0,023 \cos \beta) Pr \cdot r \sin \beta r d\beta}{EJ_y} = 0,106 \frac{Pr^3}{EJ_y}.$$

Podobnie obliczamy pionowe przesunięcie w_B punktu B przykładając w nim jako „czujnik” pionową siłę jednostkową, dla której moment $m_\theta = -r(1 - \cos \beta)$. Wynik

$$w_B = \int_0^\pi \frac{M_\theta [-r(1 - \cos \beta)] r d\beta}{EJ_y} = 0,089 \frac{Pr^3}{EJ_y} > 0$$

wskazuje, że przesunięcie to zachodzi do dołu.

Zadania

1. Wyznaczyć ugięcie w_C punktu C belki (rys. 10.16), gdy $a = b = l/2$. Ile razy jest ono mniejsze od ugięcia podobnej belki nie utwierdzonej na końcach (rys. 5.52)?

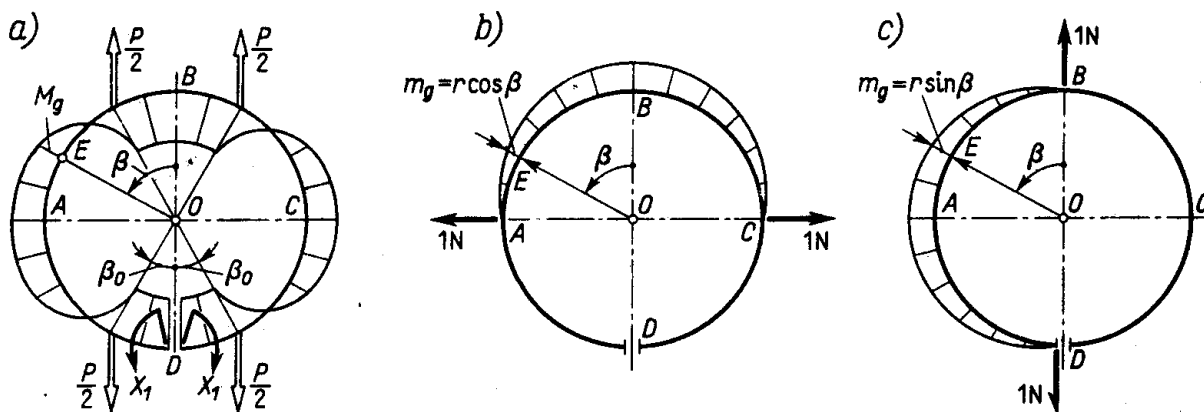
Odp. Obliczone z superpozycji $w_C = Pl^3/192EJ$, jest czterokrotnie mniejsze niż wartość f z wzoru (5.30).

2. Wyznaczyć ugięcie w przęsła l_2 belki ciągłej (rys. 10.24) w miejscu działania siły P , jeśli $EJ_y = 1,74 \cdot 10^5 \text{ N m}$.

Odp. $w = (Pa^2b^2/3lEJ_y) + [X_1 b (l^2 - b^2)/6lEJ_y] + [X_2 a (l^2 - a^2)/6lEJ_y]$. Wstawiając $P = 2 \text{ kN}$, $a = 0,175 \text{ m}$, $b = 0,325 \text{ m}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $X_1 = -179 \text{ N m}$, $X_2 = -34 \text{ N m}$ otrzymujemy $w = 0,61 \times 10^{-5} \text{ m} = 6,1 \text{ } \mu\text{m}$.

3. Obliczyć pionowe przesunięcie punktu F ramy (rys. 10.38) biorąc dane jak w zadaniu 7 art. 10.5.

Odp. $f = 5ql^4/768EJ'_y$, słuszne, gdy $h = l/2$, $J'_y = 0,5J''_y$.



Rys. 10.58. Określenie przemieszczeń w pierścieniu z rys. 10.41

4. Wyznaczyć zmianę długości średnic AC i BD pierścienia (rys. 10.41). Zbadać przypadek, gdy $\beta_0 = 0$.

Rozwiązanie. Potraktujmy pierścień jako rozcięty myślowo w przekroju D (rys. 10.58). Zgodnie z wynikami zadania 9 art. 10.5 ujawniony zostaje przy tym wysiłek pod postacią momentu

$$M_D = X_1 = (Pr/2\pi) [2 \cos \beta_0 - (\pi - 2\beta_0) \sin \beta_0],$$

a wypadkowy moment gnący w przekroju E łuku AB jest

$$M_g = -X_1 = \text{const}, \quad \text{gdy } \beta (0, \beta_0); \quad M_g = \frac{1}{2} Pr (\sin \beta - \sin \beta_0) - X_1, \quad \text{gdy } \beta [\beta_0, (\pi/2)],$$

przy czym $M_g > 0$ oznacza ściskanie włókien zewnętrznych.

Aby obliczyć zmianę poziomej średnicy AC , wprowadzamy w tak rozciętym statycznie wyznaczalnym pierścieniu „czujnik” pod postacią dwóch jednostkowych sił (rys. 10.58b). Odpowiadający ich działaniu moment istnieje tylko w części ABC i w przekroju E jest

$$m_g = r \cos \beta \text{ N m/N}, \quad \text{gdy } -\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2.$$

Zgodnie z wzorem (9.2) poszukiwana zmiana f_{AC} średnicy AC

$$f_{AC} = \frac{2}{EJ_y} \int_0^{\beta_0} (-X_1) (r \cos \beta) r d\beta + \frac{2}{EJ_y} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \left[\frac{Pr}{2} (\sin \beta - \sin \beta_0) - X_1 \right] (r \cos \beta) r d\beta,$$

przy czym wykorzystano symetrię wykresów M_g i m_g względem osi BD . Po wykonaniu całkowania, podstawieniu znanej już wartości X_1 oraz uporządkowaniu otrzymamy

$$f_{AC} = \frac{Pr^3}{2\pi EJ_y} [(\pi - 4 \cos \beta_0) - \sin \beta_0 (4\beta_0 - \pi \sin \beta_0)].$$

Łatwo sprawdzić, że $f_{AC} < 0$, czyli że średnica AC ulega zmniejszeniu, co zgadza się z intuicją.

Podobnie obliczamy zmianę f_{BD} średnicy pionowej wprowadzając jako „czujnik” dwie jednostkowe siły (rys. 10.58c), przy których działaniu występuje tylko na łuku DAB moment

$$m_g = r \sin \beta \text{ N m/N}, \quad \text{gdy } 0 \leq \beta \leq \pi.$$

Wykorzystując symetrię wykresów M_s i m_s względem osi AC otrzymamy teraz

$$f_{BD} = \frac{2}{EJ_y} \int_0^{\beta_0} (-X_1) r \sin \beta r d\beta + \frac{2}{EJ_y} \int_{\beta_0}^{\pi/2} \left[\frac{Pr}{2} (\sin \beta - \sin \beta_0) - X_1 \right] r \sin \beta r d\beta,$$

a po wykonaniu całkowania i podstawieniu X_1

$$f_{BD} = \frac{Pr^3}{4\pi EJ_y} [(\pi^2 - 8 \cos \beta_0) + 4 \sin \beta_0 (\pi - 2\beta_0) - \pi (2\beta_0 + \sin 2\beta_0)].$$

W szczególnym przypadku, gdy $\beta_0 = 0$, czyli gdy pierścień obciążają dwie siły P przyłożone w punktach B i D ,

$$f_{AC} = \frac{\pi - 4}{2\pi} \frac{Pr^3}{EJ_y} \approx -0,137 \frac{Pr^3}{EJ_y}, \quad f_{BD} = \frac{\pi^2 - 8}{4\pi} \frac{Pr^3}{EJ_y} \approx 0,149 \frac{Pr^3}{EJ_y}.$$

5. Obliczyć pionowe przesunięcie punktu B półpierścienia (rys. 10.51).

Odp. Przykładając w punkcie B części BC pionową, skierowaną do dołu siłę 1 N, dla której

$$m_s = -r \sin \beta \text{ Nm/N}, \quad M_s = r(1 - \cos \beta) \text{ Nm/N},$$

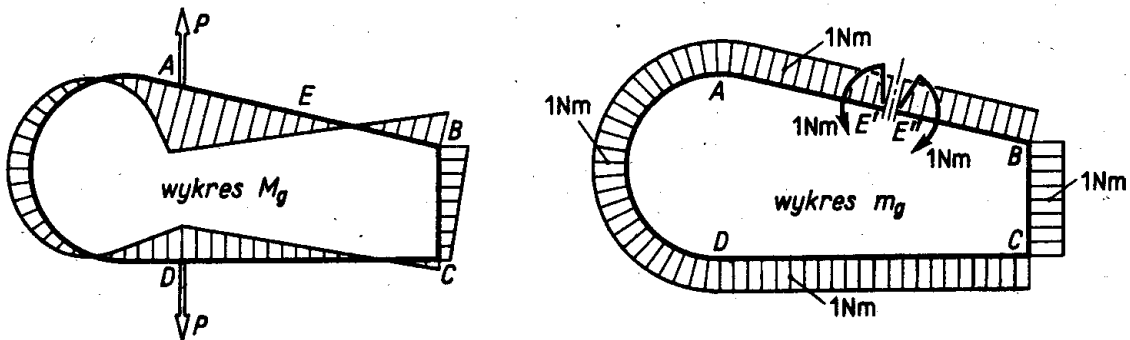
obliczamy według wzoru (9.9)

$$f_B = \frac{1}{EJ_y} \int_0^{\pi/2} qr^2 \left(\frac{4 \cos \beta}{\pi} - 1 \right) (-r \sin \beta) r d\beta + \frac{1}{C} \int_0^{\pi/2} qr^2 \left(\beta - \frac{4 \sin \beta}{\pi} \right) r(1 - \cos \beta) r d\beta,$$

gdzie $M_s = qr^2[(4 \cos \beta/\pi) - 1]$, $M_s = qr^2[\beta - (4 \sin \beta/\pi)]$ są wypadkowymi momentami z zadania 1 art. 10.6. Po scałkowaniu

$$f_B = \frac{(\pi - 2)qr^4}{\pi EJ_y} + \left(\frac{\pi^2 + 8}{8} - \frac{\pi^2 + 4}{2\pi} \right) \frac{qr^4}{C}.$$

6. Udowodnić, że w każdej jednoobwodowej bezprzegubowej ramie ściśle płaskiej o stałej sztywności i płasko obciążonej (rys. 10.59) wypadkowy moment M_s spełnia warunek $\oint M_s ds = 0$.



Rys. 10.59. Oznaczenia do zadania 6

Rozwiązanie. Przetnijmy myślowo ramę w dowolnym punkcie E i obliczmy względny obrót przekrojów E' i E'' . W tym celu, zgodnie z art. 9.4, obciążamy ramę w tych przekrojach dwoma jednostkowymi momentami, dla których $m_s = 1 = \text{const}$. Poszukiwany kąt obrotu jest według (9.2)

$$\vartheta = \oint \frac{M_s m_s ds}{EJ_y} = \frac{1}{EJ_y} \oint M_s \cdot 1 \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \oint M_s ds = 0,$$

gdyż w rzeczywistym ustroju obydwie przekroje E' i E'' zawsze do siebie pasują. Wynika stąd, że $\int M_s ds = 0$, c.b.d.d.

Wynik powyższy wykorzystujemy często do wstępnej kontroli prawidłowości rozwiązania takich ustrojów.

10.8. Naprężenia montażowe i ciepłne

W ustrojach statycznie niewyznaczalnych niezależnie od naprężeń wywołanych obciążeniem mogą istnieć tzw. *naprężenia montażowe* jako skutek błędów wykonania elementów ustroju. Weźmy dla przykładu kratownicę (rys. 10.1) nieobciążoną ($P = 0$) i wykonaną ściśle według wymiarów. W takich warunkach przy myślowym przecięciu w miejscu $m-m$ pręta AD szczelina $\alpha_{1,0} = 0$, nie ma bowiem żadnej przyczyny do jej powstania. Konsekwencją tego jest, że we wszystkich prętach wypadkowe siły $N_i = 0$. Jeśli jednak przy myślowym rozcięciu usuniemy *dotatkowo* w miejscu $m-m$ odcinek pręta o długości b , to w miejscu tym powstanie szpara. Dla jej usunięcia potrzeba użyć sił X_1 określonych z równania (10.1), w którym $\alpha_{1,0} = b$, czyli

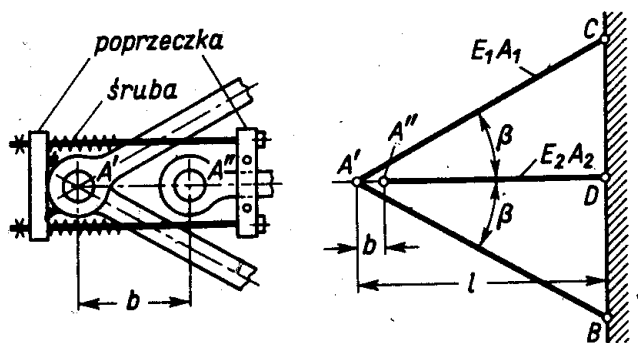
$$X_1 = -b/\alpha_{1,1}, \quad (a)$$

a po podstawieniu $\alpha_{1,1}$ z wzoru (e) art. 10.1

$$X_1 = -\frac{E_2 A_2 (b/l)}{1 + (E_2 A_2 / 2E_1 A_1 \cos^3 \beta)}, \quad (b)$$

przy czym $X_1 < 0$ oznacza, że pręt AD jest rozciągany. W prętach AB i AC powstają ściskające siły $N_1 = X_1/2 \cos \beta$.

Łatwo zauważyć, że opisana myślowa operacja przecięcia pręta AD , usunięcia odcinka b i powtórnego złączenia jest równoznaczna ze zmontowaniem przy użyciu ścią-gacza⁽¹⁾ „na siłę” ustroju (rys. 10.60), w którym długość pręta $A''D$ jest o b mniejsza od



Rys. 10.60. Montaż niedokładnie wykonanego ustroju

⁽¹⁾ Z początku między uchem A' zespołu prętów $A'B$ i $A'C$ a uchem A'' pręta $A''D$ istnieje szpara b . Dokręcając śruby ścią-gacza, którego jedną poprzeczkę zaciśnięto na pręcie $A''D$, a drugą oparto na uchu A' , doprowadzamy do pokrycia się otworów A' i A'' , po czym przez te ucha przetykamy sworzeń, a ścią-gacz usuwamy.

nominalnej. Gdyby długość ta była większa od nominalnej, we wzorze (b) należałoby podstawić $b < 0$ i wtedy $X_1 > 0$, co odpowiada ściskaniu pręta AD , a rozciąganiu pozostałych (rys. 10.1d).

Ten sam efekt co i niedokładność wykonania powoduje nierównomierne ogrzanie ustroju. Jeśli mianowicie w idealnie wykonanej i zmontowanej w temperaturze t_0 konstrukcji oziębić pręt AD o Δt , to w myślowym rozcięciu $m-m$ powstanie szczelina $b = \lambda_t \Delta t l$, a wartość siły X_1 jest wtedy

$$X_1 = - \frac{E_2 A_2 \lambda_t \Delta t}{1 + (E_2 A_2 / 2E_1 A_1 \cos^3 \beta)}, \quad (c)$$

gdzie λ_t — współczynnik rozszerzalności cieplnej pręta AD . Powstające przy tym naprężenia w prętach ustroju $\sigma' = -X_1/A_2$ i $\sigma'' = X_1/2A_1 \cos \beta$ nazywamy *cieplnymi* lub *termicznymi*.

Jak widać, zagadnienie naprężeń montażowych i cieplnych sprowadza się do rozwiązania równania kanonicznego, w którym wyraz $\alpha_{1,0}$ przedstawia skutek odchyłek wymiarów spowodowanych wykonaniem bądź zmianą temperatury.

Powyższa reguła obowiązuje i w bardziej złożonych ustrojach. Weźmy dla przykładu nieobciążoną ramę (rys. 10.30), która przez myślowe rozcięcie $a-a'$ stała się statycznie wyznaczalna z nie znanymi na razie wartościami X_1, X_2, X_3 . Jeśli z powodu błędnego wykonania lub zmian temperatury przekroje a i a' tej statycznie wyznaczalnej ramy rozejdą się o pokazane na rysunku wielkości $\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \alpha_{3,0}$, to wielkości X likwidujące to rozejście wyznaczamy z równań kanonicznych (a) i (b) art. 10.5. Odpowiadające im składowe wysiłki M_θ, N i T obliczamy nadal z równań (c), art. 10.5, w których oczywiście człony $M_\theta^{(0)}, N^{(0)}$ i $T^{(0)}$ są równe zeru.

Samo określenie nieciągłości („szczelin”) $\alpha_{i,0}$ dokonujemy na ogół bez rachunków z prostych rozważań geometrycznych. W bardziej złożonych przypadkach płaskiego ustroju stosujemy metodę Maxwella–Mohra (art. 9.3). Deformacje $d\theta, du, dw$ elementu (rys. 9.20) są tu wymuszone błędnym wykonaniem bądź zmianą temperatury. Rolę „czujnika” mierzącego wielkość $\alpha_{i,0}$ spełnia teraz siła $X_i = 1$ wywołująca wysiłek o składowych $m = m_\theta^{(i)}, n = n^{(i)}, t = t^{(i)}$, wobec czego z wzoru (9.1) mamy

$$\alpha_{i,0} = \int m_\theta^{(i)} d\theta + \int n^{(i)} du + \int t^{(i)} dw, \quad (10.13)$$

gdzie całkowanie obejmuje wszystkie elementy ustroju.

Podobnie obliczamy wielkości $\alpha_{i,0}$ w złożonych ustrojach przestrzennych stosując wzór (9.7) i otrzymując w wyniku

$$\alpha_{i,0} = \int (m_y^{(i)} d\theta + m_z^{(i)} d\chi + m_s^{(i)} d\varphi + n^{(i)} du + t_z^{(i)} dw + t_y^{(i)} dv), \quad (10.14)$$

gdzie $d\theta, \dots, dv$ — zadane deformacje elementu (rys. 9.31) spowodowane błędnym wykonaniem lub zmianą temperatury, a $m_y^{(i)}, \dots, t_y^{(i)}$ składowe wysiłki stanu „i” ustroju, gdy $X_i = 1$.

Z całego toku rozumowania widać, że wyrazy $\alpha_{i,0}$ odpowiadające zmianom temperatury bądź odchyłkom wykonania są *niezależne* od wyrazów $\alpha_{i,0}$ spowodowanych obciążeniem. Wynika stąd, że *naprężenia termiczne i montażowe są całkowicie niezależne od*

naprężeń wywołanych obciążeniem ustroju. Jeśli więc na ustrój mający naprężenia termiczne lub montażowe działają również obciążenia, to całkowite naprężenia są algebraiczną sumą tych dwóch składników. Ich absolutna wartość może być w niektórych przypadkach mniejsza od każdego ze składników, co w rezultacie zwiększa bezpieczeństwo ustroju. Na ogół jednak całkowite naprężenia są większe niż w przypadku działania samych obciążeń, co obniża bezpieczeństwo. Jedyną rzeczą do zrobienia jest wtedy zmniejszenie naprężeń termicznych lub montażowych. Jak widać choćby z wzorów (b) i (c), można to osiągnąć przez zwiększenie dokładności wykonania (zmniejszyć b) bądź zapewnienie takich warunków pracy, w których zmiana Δt temperatury byłaby mała.

Zadania

1. Bardzo długą⁽¹⁾ stalową prostą szynę kolejową umocowano na nieodkształcalnym podłożu przy $t_0 = 10^\circ\text{C}$. Jakie będą w niej naprężenia przy ogrzaniu jej w lecie do $t_1 = 50^\circ\text{C}$ i przy oziębieniu w zimie do $t_2 = -40^\circ\text{C}$? $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\lambda_t = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

Rozwiązanie. Gdyby szyna składała się z oddzielnych elementów, wówczas przy zmianie temperatury $\Delta t = t_1 - t_0$ każdy z nich wydłużyłby się o $\Delta ds = \lambda_t \Delta t ds$, a względne wydłużenie ich byłoby $\varepsilon_t = \Delta ds/ds = \lambda_t \Delta t$. W rzeczywistości przytwierdzonej do podłoża szynie istnieją naprężenia normalne σ powodujące, że $\varepsilon_t + \varepsilon_\sigma = \varepsilon_t + (\sigma/E) = 0$. Stąd otrzymujemy

$$\sigma = -\lambda_t \Delta t_1 E = -12,5 \cdot 10^{-6} (1/^\circ\text{C}) \cdot 40^\circ\text{C} \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} = -100 \text{ MPa}$$

i podobnie w warunkach zimowych, gdy $\Delta t_2 = -50^\circ\text{C}$, $\sigma = 125 \text{ MPa}$.

2. Jak zmieniają się wyniki zadania 2 art. 10.1, gdy zespół tulei i wałka ogrzać o $\Delta t = 50^\circ\text{C}$. Współczynnik λ_t dla duralu $\lambda_{td} = 24 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, a dla stali $\lambda_{ts} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

Odp. Założmy $P = 0$. Przetnijmy myślowo wałek i założmy, że w nowo powstałych przekrojach działają rozciągające siły X_1 , określone z równania $X_1 = -\alpha_{1,0}/\alpha_{1,1}$, gdzie

$$\alpha_{1,0} = -(\lambda_{td} - \lambda_{ts}) \Delta t l, \quad \alpha_{1,1} = [l/(EA)_s] + [l/(EA)_d],$$

a l – długość wałka. Stąd

$$X_1 = \frac{(\lambda_{td} - \lambda_{ts}) \Delta t (EA)_s}{1 + [(EA)_s/(EA)_d]}$$

i dalej $\sigma_{ts} = X_1/A_s = 53 \text{ MPa}$, $\sigma_{td} = -X_1/A_d = -24 \text{ MPa}$. Dodając te wartości do otrzymanych uprzednio naprężeń ściskających otrzymujemy ostatecznie $\sigma_s = -115 + 53 = -62 \text{ MPa}$, $\sigma_d = -63 \text{ MPa}$.

3. Jak zmieniają się wyniki zadania 6 art. 10.1, jeśli zespół rur (rys. 10.7) ogrzać o $\Delta t = 82^\circ\text{C}$? $\lambda_{tm} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$, $\lambda_{tm} = 17 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

Odp. Spowodowane temperaturą ciśnienie rur na siebie $p_t = X_1$ określamy z równania (10.1), w którym

$$\alpha_{1,1} = (r_{sr}^2/E_s \delta_s) [1 + (E_s/E_m) (\delta_s/\delta_m)], \quad \alpha_{1,0} = -(\lambda_{tm} - \lambda_{ts}) \Delta t r_{sr}$$

oznaczając szczelinę między rurami wywołaną przez $p_t = 1 \text{ MPa}$ bądź przez zmianę temperatury. Stąd $X_1 = 1,25 \text{ MPa}$, a odpowiadające $\sigma'_s = X_1 r_{sr}/\delta_s \approx 19 \text{ MPa}$, $\sigma'_m \approx -31 \text{ MPa}$. Całkowite naprężenia są $\sigma_s \approx 77 \text{ MPa}$, $\sigma_m = -2 \text{ MPa}$ (ściskanie).

4. Wszystkie pręty ustroju (rys. 10.1), w którym $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $A_1 = A_2 = 10 \text{ cm}^2$, $l = 1 \text{ m}$, $\beta = 30^\circ$ ogrzano o $\Delta t = 100^\circ\text{C}$. Wyznaczyć naprężenia termiczne, jeśli $\lambda_t = 12,0 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.

Odp. Wyraz wolny $\alpha_{1,0}$ obliczamy tym razem z wzoru (10.13), w którym $m_g^{(1)} \equiv 0$, $t^{(1)} \equiv 0$. Po-

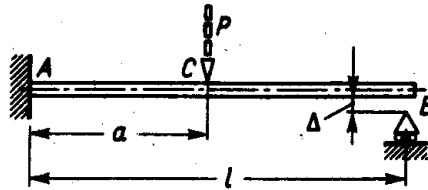
⁽¹⁾ Szynę taką przed montażem spawa się z odcinków.

nieważ siła $n_i^{(1)}$ w pręcie i jest stała, zatem $\int n_i^{(1)} du_i = n_i^{(1)} u_i = \lambda_i \Delta t l_i n_i^{(1)}$. Biorąc $n_i^{(1)}$ z wzorów (c) art. 10.1 mamy

$$\alpha_{1,0} = (2n_1 \lambda_i \Delta t l / \cos \beta) + n_2 \lambda_i \Delta t l = \lambda_i \Delta t l \operatorname{tg}^2 \beta$$

oraz $\alpha_{1,1}$ z wzoru (e) art. 10.1. W rezultacie $X_1 \approx -45 \text{ kN}$, a naprężenia w prętach AD i AB są $\sigma_{AD} = 45 \text{ MPa}$, $\sigma_{AB} = -26 \text{ MPa}$.

5. Na skutek niedokładnego wykonania między podporą B a końcem belki istnieje luz Δ (rys. 10.61). Wyznaczyć wykres momentu gnącego, gdy obciążymy belkę siłą P .



Rys. 10.61. Do zadania 5

Odp. Obierając niewiadomą X_1 jak na rys. 10.19, otrzymujemy równanie kanoniczne $\alpha_{1,1} X_1 + \alpha_{1,0} + \Delta = 0$, gdzie $\alpha_{1,1}$ i $\alpha_{1,0}$ są jak w zadaniu 4 art. 10.3. Stąd mamy

$$X_1 = \frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3} - \frac{3EJ_y \Delta}{l^3}$$

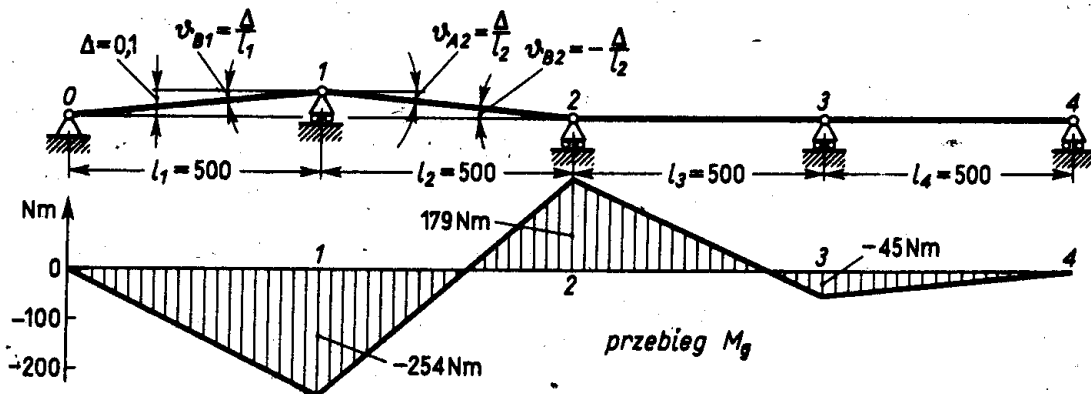
Wynik ten ma sens tylko wtedy, gdy $X_1 > 0$, czyli gdy luz Δ nie jest zbyt duży. Wynik $X_1 < 0$ świadczy, że nawet przy działaniu siły P między belką a podporą jest luz i w rzeczywistości $X_1 = 0$. Dalszy ciąg zadania, jak już wielokrotnie omawiano.

6. Na skutek niedokładnego wykonania łożysko 1 belki ciągłej (rys. 10.24) jest przesunięte do góry o $\Delta = 0,1 \text{ mm}$. Wyznaczyć wykres M_x po zmontowaniu belki. $EJ_y = 1,74 \cdot 10^5 \text{ N m}^2$.

Rozwiązanie. Po myślowym podziale belki na przęsła jak na rys. 10.23b, c narysujmy jej obraz z uwzględnieniem niedokładności wykonania (rys. 10.62). Widać, że niedokładność ta powoduje na podporach 1 i 2 załomy

$$\vartheta_{B,1} + \vartheta_{A,2} = (\Delta/l_1) + (\Delta/l_2) = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad},$$

$$\vartheta_{B,2} + \vartheta_{A,3} = -\Delta/l_2 = -0,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad}, \quad \vartheta_{B,3} + \vartheta_{A,4} = 0,$$



Rys. 10.62. Analiza błędu ustawienia łożysk w belce ciągłej

których znaki odpowiadają umowie podanej na rys. 10.23. Podstawiając te dane do równania trzech momentów (10.8) i dzieląc przez jednakową dla wszystkich przęseł długość $l = 0,5 \text{ m}$ mamy:

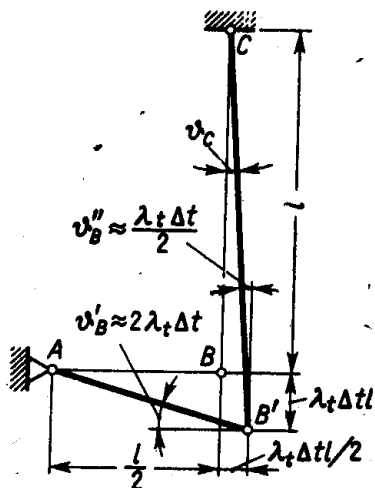
$$\begin{aligned} \text{dla podpory 1:} \quad & 4X_1 + X_2 + (6 \cdot 1,74 \cdot 10^5 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3} / 0,5) = 0, \\ \text{dla podpory 2:} \quad & X_1 + 4X_2 + X_3 + [6 \cdot 1,74 \cdot 10^5 \cdot (-0,2) \cdot 10^{-3} / 0,5] = 0, \\ \text{dla podpory 3:} \quad & X_2 + 4X_3 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Stąd wyznaczamy $X_1 = -254 \text{ N m}$, $X_2 = 179 \text{ N m}$, $X_3 = -45 \text{ N m}$. Postępując teraz jak w zad. 1 art. 10.4 otrzymujemy wykres M_p . Porównując go z wykresem (rys. 10.24) widzimy, że momenty wywołane obciążeniem są tego rzędu co wynikające z błędów wykonania. Całkowity moment gnący jest sumą tych składników i na przykład w przekroju na podporze 1 jest -433 N m .

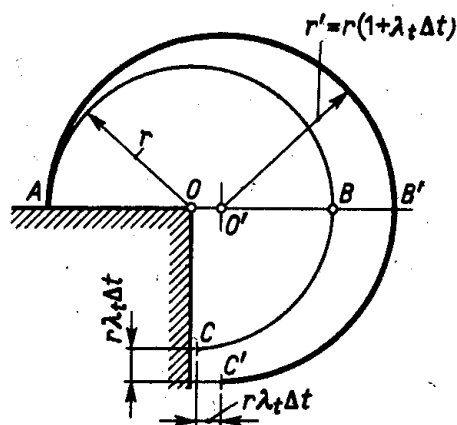
7. Zmontowaną w temperaturze t_0 ramę (rys. 10.35) ogrzano o Δt °C. Wyznaczyć momenty gnące X_1 w punkcie C i X_2 w narożu B.

Odp. Po wprowadzeniu myślowych przegubów B i C narysujmy obraz ramy po ogrzaniu (rys. 10.63). Widać, że kąt prosty w narożu B zmieni się o $\vartheta'_B + \vartheta''_B \approx 2,5\lambda_t \Delta t$, a w punkcie C o $\vartheta_C \approx 0,5\lambda_t \Delta t$. Te wielkości są jednocześnie wyrazami wolnymi

$$\alpha_{1,0} = -\vartheta_C = -0,5 \lambda_t \Delta t, \quad \alpha_{2,0} = \vartheta'_B + \vartheta''_B = 2,5 \lambda_t \Delta t$$



Rys. 10.63. Do zadania 7



Rys. 10.64. Do zadania 8

równań kanonicznych, przy czym $\alpha_{1,0} < 0$, gdyż ϑ_C ma zwrot przeciwny do momentu X_1 . Biorąc wyniki zadania 3 art. 10.5 mamy

$$2X_1 + X_2 - (3EJ, \lambda_t \Delta t / l) = 0, \quad X_1 + 3X_2 + (15EJ, \lambda_t \Delta t / l) = 0,$$

skąd $X_1 = 24EJ, \lambda_t \Delta t / 5l$, $X_2 = -33EJ, \lambda_t \Delta t / 5l$.

8. Zmontowany w temperaturze t_0 pierścień (rys. 10.36) ogrzano o Δt °C. Wyznaczyć wysiłek przekroju C.

Odp. Po myślowym rozcięciu pierścienia w przekroju C narysujmy jego obraz po ogrzaniu (rys. 10.64). Konfrontując ten obraz z obrazem sił X_1, X_2, X_3 na rys. 10.36 widzimy, że

$$\alpha_{1,0} = -r \lambda_t \Delta t, \quad \alpha_{2,0} = -r \lambda_t \Delta t, \quad \alpha_{3,0} = 0.$$

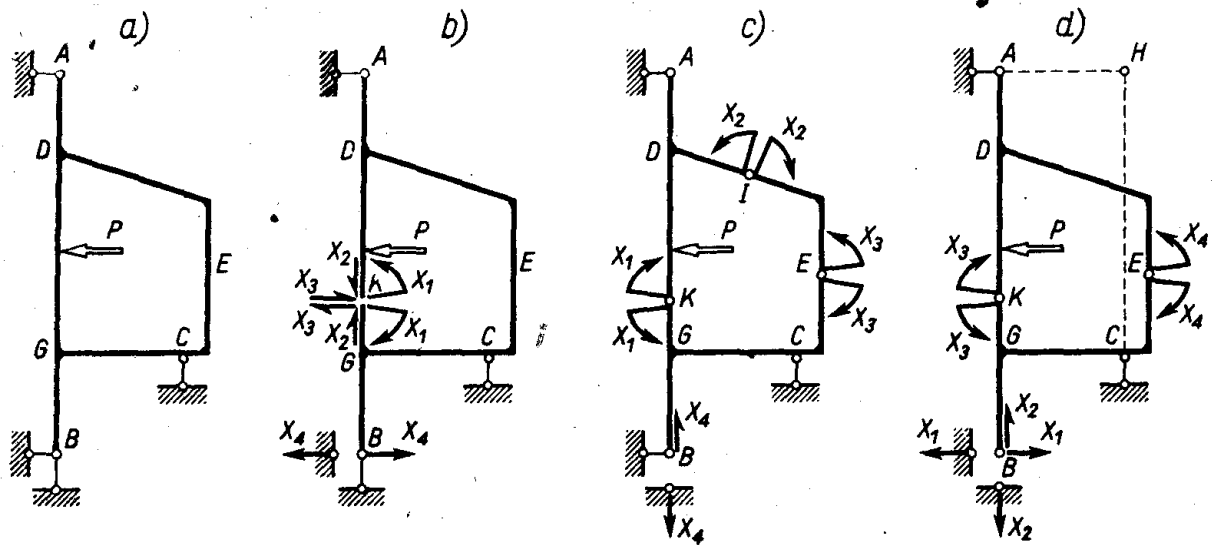
Wobec czego równania kanoniczne (zad. 5 art. 10.5) są

$$\begin{aligned} [(9\pi + 8)/4] X_1 r + (1/2) X_2 r - [(3\pi + 2)/2] X_3 - (EJ, \lambda_t \Delta t / r) &= 0, \\ (1/2) X_1 r + (3\pi/4) X_2 r - X_3 - (EJ, \lambda_t \Delta t / r) &= 0, \\ -[(3\pi + 2)/2] X_1 r - X_2 r + (3\pi/2) X_3 + 0 &= 0, \end{aligned}$$

skąd $X_1 = X_2 \approx 0,699EJ, \lambda_t \Delta t / r^2$, $X_3 \approx 0,995EJ, \lambda_t \Delta t / r$.

10.9. Uwagi końcowe

Jedynym kryterium stosowanym dotychczas przy obiorze ustroju podstawowego było, żeby ustrój ten nie był przypadkiem mechanizmem, czyli żeby on, jako całość, lub jego elementy nie miały swobody ruchu jako ciała sztywne. Dla przykładu, w ustroju czterokrotnie statycznie niewyznaczalnym (rys. 10.65) kryterium to spełnione jest dla wariantów według rys. 10.65b i c. Nie jest ono natomiast spełnione dla wariantu według rys. 10.65d,



Rys. 10.65. Przykłady różnych ustrojów podstawowych jednej i tej samej konstrukcji statycznie niewyznaczalnej

albowiem ustrój jako całość ma tu swobodę obrotu względem punktu H . Ponadto w swej części $DGCE$ jest on przesztyniony, gdyż ciąg ten ma tylko dwa przeguby, a nie trzy (rys. 10.31), wobec czego taki ustrój podstawowy jest niedopuszczalny.

Powstaje pytanie, czy dla danej konstrukcji wszystkie prawidłowe ustroje podstawowe są równoprawne? Odpowiedź na to jest różna zależnie od celu analizy. Gdy celem jest kontrola całkowicie określonego ustroju, odpowiedź jest twierdząca. Inna natomiast jest sytuacja, gdy celem jest kształtowanie, a w szczególności taki dobór wymiarów przekrojów, który daje racjonalne wykorzystanie materiału. W ustrojach bowiem statycznie niewyznaczalnych wysiłek przekroju zależy nie tylko od obciążenia zewnętrznego, lecz i od sił X określonych z równań kanonicznych, których współczynniki z kolei zależą od sztywności elementów. Zmiana więc wymiarów jednego elementu wpływa na wartości naprężeń nie tylko dlatego, że zmieniają się parametry geometryczne przekroju jak A , W_s , W_y itd., lecz i dlatego, że zmienia się wysiłek przekroju. Z tego powodu zadania kształtowania rozwiązujemy na ogół metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym z nich dobór przekrojów przeprowadzamy dla ustroju podstawowego, tj. statycznie wyznaczalnego. Określone stąd sztywności elementów umożliwiają obliczenie sił X oraz skorygowanego przez nie wypadkowego wysiłku przekrojów, a następnie wymiarów przekrojów dobranych z warunku naprężeń dopuszczalnych. Określone dla tych skorygowanych sztywności nowe wartości sił X i nowe wartości wysiłku przekrojów stanowią drugie przybliżenie umożliwiające powtórny

korektę wymiarów itd. Aby ten proces był szybkozbieżny, istotne jest, aby korekty wniesione przez statycznie niewyznaczalne siły X były małe. Jest to możliwe wtedy, gdy przewidywany obraz odkształceń ustroju podstawowego zbliża się do obrazu odkształceń rzeczywistej konstrukcji. Tak na przykład obraz odkształceń stanu „0” belki ciągłej przy podziale jej na dwupodporowe przeszła (rys. 10.23d) jest na pewno bliższy rzeczywistości niż obraz odkształceń stanu „0” według schematu z rys. 10.9. Z tego powodu schemat pierwszy jest lepszy od drugiego.

Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności i obiór wielkości X są „konceptyjnymi” etapami rozwiązania dającymi często ogromne ułatwienie zadania. W odróżnieniu od nich ostatni etap, tj. sformułowanie równań kanonicznych, sprowadza się do jednolitego dla wszystkich ustrojów schematu i polega na zsumowaniu uogólnionych przemieszczeń w tym samym punkcie i tym samym kierunku. Niepotrzebne jest przy tym wnikanie, czy zwroty tych przemieszczeń są zgodne, czy nie, gdyż odpowiedź na to dają od razu odpowiednie wzory, jak (10.3), (10.5), (10.11) itd., do których wielkości podcałkowe (momenty gnące, siły wzdłużne itd.) wstawiamy z jednakowymi lub przeciwnymi znakami⁽¹⁾ zależnie od tego, czy ich zwroty są zgodne, czy nie.

Opis ogólnych właściwości ustrojów statycznie niewyznaczalnych zaczniemy od *zasady minimum energii odkształcenia*. Weźmy dla przykładu belkę ciągłą z ujawnionymi w niej siłami X_1, \dots (rys. 10.9b). Składowe wysiłku przekroju określonego współrzędną x , tj. $M_\theta(x), T(x)$, są wtedy funkcjami znanych sił P_1, P_2 oraz nieznanymi X_1, X_2, X_3 . Tę samą właściwość ma energia U odkształcenia ustroju obliczona z wzoru (9.23), do którego wstawiamy znalezione poprzednio $M_\theta(P_1, P_2, X_1, X_2, X_3, x)$, $T(P_1, \dots, X_3, x)$ i całkujemy względem zmiennej x . W wyniku mamy więc

$$U(P_1, P_2, X_1, X_2, X_3).$$

Jeśli teraz obliczymy pochodne cząstkowe $\partial U/\partial X_1, \dots, \partial U/\partial X_3$, to zgodnie z twierdzeniem Castigliana (9.24), są one przemieszczeniami (ugięciami) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, które w rzeczywistym ustroju są równe zeru. Tak więc otrzymujemy zależności

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0, \quad (a)$$

warunkujące ekstremum funkcji U . Dodatkowo można dowieść, że to ekstremum oznacza minimum. Podobne rezultaty (a) otrzymujemy dla dowolnego sprężystego i liniowego ustroju statycznie niewyznaczalnego, skąd wynika, że wartości sił statycznie niewyznaczalnych redukują do minimum energię odkształcenia ustroju i to właśnie stanowi istotę wspomnianej zasady.

Rozwinięcie warunków (a) daje w wyniku liniowe równania wiążące ze sobą nieznanne siły X i znane siły P . Równania te są identyczne z równaniami kanonicznymi. W takim ujęciu zasadę minimum energii wykorzystujemy się do rozwiązywania zadań statycznie niewyznaczalnych. W porównaniu z metodą sił sposób ten zwłaszcza od strony fizycznej jest mniej przejrzysty, a często bardziej kłopotliwy rachunkowo i dlatego został pominięty.

⁽¹⁾ Osobna, stanowiąca niestety źródło wielu błędów, jest kwestia określenia wysiłku przekrojów, tj. wykresów $M_\theta, m_\theta, \dots$ dla ustrojów statycznie wyznaczalnych.

Istotne są natomiast wypływające z tej zasady wnioski ogólne. Obliczmy mianowicie dla dowolnego ustroju energię U_0 w stanie „0”, a więc statycznie wyznaczalnym, i rzeczywistą energię U_{sn} tegoż ustroju, gdy działają również określone z równań kanonicznych siły X . Z zasady minimum energii wynika, że $U_{sn} < U_0$. Jeśli teraz wprowadzić pojęcie średnich w całej objętości V ustroju naprężeń σ_0 i σ_{sn}

$$(\sigma_0^2/2E)V = U_0 \quad \text{i} \quad (\sigma_{sn}^2/2E)V = U_{sn}, \quad (b)$$

to z poprzedniej nierówności wynika, że $\sigma_{sn} < \sigma_0$, czyli że *wprowadzenie statycznej niewyznaczalności w ustroju zmniejsza średnie naprężenia*. Nie oznacza to jednak redukcji naprężeń we wszystkich elementach ustroju.⁽¹⁾ Podobnie stosując twierdzenie Clapeyrona (9.21) można dowieść, że *wprowadzenie statycznej niewyznaczalności zmniejsza średnie odkształcenia ustroju*.

Poza wymienionymi dwiema zaletami dodatkową zaletą ustrojów statycznie niewyznaczalnych w porównaniu ze statycznie wyznaczalnymi jest zwiększenie pewności działania w sytuacjach awaryjnych, gdyż zniszczenie jakiegoś więzu powoduje w pierwszym przypadku na ogół tylko zmianę sposobu pracy, w drugim natomiast zamienia ustrój na mechanizm i powoduje katastrofę całości.

Zasadniczą wadą ustrojów statycznie niewyznaczalnych jest ich czułość na błędy montażu lub zmiany temperatury (art. 10.8). Obydwa te czynniki mają na ogół charakter losowy i należy liczyć się z rozrzutem odpowiadających im naprężeń. Zwiększenie zatem precyzji wykonania bądź montażu jest niezbędnym warunkiem stosowania takich ustrojów w praktyce.

⁽¹⁾ Zadanie 10 art. 10.3.